Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2001

Nombre: ____________________________

Carnet: _______________ Sección: _____

MA-1123—Examen Final, Abril - Julio 2001 —

Nota: Justifique todas sus afirmaciones, cada ejercicio vale 10 puntos.

1. Considere en $\mathbb{R}^3$ el plano S de ecuación $x + y + 2z = 0$. Sea $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función que asocia a cada vector $\xi \in \mathbb{R}^3$ el vector $\eta = p(\xi)$ que es la proyección ortogonal de ξ sobre el plano S.
   a) ¿Cómo se calcula $p(\xi)$?
   b) Demuestre que p es lineal
   c) Calcule la matriz de p en la base canónica.

2. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & - & 6 \\ 1 & 2 & - & 2 \\ 2 & 4 & - & 4 \end{pmatrix}$$
   a) Calcule los autovalores de A
   b) Para cada autovalor, plantee y resuelva el sistema de ecuaciónes que permite encontrar autovectores.
   c) ¿Existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A? ¿Es diagonalizable A?

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función lineal tal que:
$$\begin{aligned} f(1,\ 0,\ 0) &= (1,\ 1,\ 1) \\ f(1,\ 1,\ 0) &= (1,\ 0,\ 0) \\ f(1,\ 1,\ 1) &= (0,\ 1, -1) \end{aligned}$$
   a) Demuestre que hay una tal f y sólo una.
   b) ¿Es f biyectiva?
   c) Calcule la matriz A de f en la base canónica y si existe, calcule A^{-1}.

4. Sea $f : V \to V$ una función lineal. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ autovectores de f, asociados a los autovalores l_1, l_2, l_3 respectivamente. Suponga que l_1, l_2, l_3 son diferentes entre sí. Demuestre que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son linealmente independientes.